ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENSINO DE JOVENS E ADULTOS

MATEMÁTICA

ENSINO FUNDAMENTAL – FASEII

CADERNO 3

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
Jaime Lerner

SECRETÁRIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Alcyone Saliba

DIRETORA GERAL DA SEED
Sônia Loyola

CHEFE DO DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPLETIVO
Regina Célia Alegro

ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO
Annete Elise Siedel

EQUIPE ELABORADORA (1ª VERSÃO)
Cristina N. Nakamura - CEEBJA de Maringá
Leoni Teresa M. Brudzinski - CEEBJA de Maringá
Sachika Sakai Takizawa - CEEBJA de Maringá
Vera Lúcia G. T. Sanches - CEEBJA de Maringá

EQUIPE COLABORADORA
Graça Rejane C. Montanher - CEEBJA de Maringá
Mafalda D. Nascimento - CEEBJA de Nova Londrina
Missayo Yamada - CEEBJA de Jandaia do Sul
Neide Aparecida de S. Moreira - CEEBJA de Jandaia do Sul
Neuza Pinto - CEEBJA de Paranavaí

EQUIPE REVISORA
Cristina Nishioka Nakamura - CEEBJA de Maringá
Mirian Nazaré B. Damaceno - CEEBJA de Maringá

EQUIPE REVISORA (VERSÃO ATUAL)
CEEBJA Paulo Freire
CEEBJA SESI-CIC

CAPA
Rosângela Gonçalves de Oliveira

ILUSTRAÇÃO
Henrique Cesar Alves de Cerqueira
Jairo de Carvalho

DIAGRAMAÇÃO
Luiz Carlos Tavares de Sá

APRESENTAÇÃO

Este material foi preparado com a intenção de ajudá-lo a compreender idéias e conceitos importantes da Matemática e a suas relações com a vida diária. Esperamos que, quando necessário, você possa aplicar esses conhecimentos em situações novas, resolvendo seus problemas do dia-a-dia.

Ele foi escrito numa linguagem simples e informal, cuja a intenção é levá-la a compreensão dos assuntos básicos da Matemática, da maneira mais clara possível.

Os conhecimentos matemáticos foram construídos ao longo do tempo e, por acharmos importante para você, apresentamos também alguns aspectos históricos dessa construção.

Nossa expectativa é que esse material torne útil e interessante o seu Curso de Matemática de 5ª a 8ª série de 1º grau.

EQUIPE ELABORADORA

ÍNDICE

UNIDADE 1 – NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE 05

1. Razão e Proporção 05
2. Regra de Três 11
3. Porcentagem.. 14

UNIDADE 2 – SEMELHANÇA... 19

1. Teorema de Tales 19
2. Figuras Semelhantes 23

UNIDADE 3 – NOÇÕES DE ESTATÍSTICA.................................... 30

1. Análise de Tabelas e Gráficos... 32
2. Plano Cartesiano.. 36
3. Construção de Tabelas e Gráficos.. 39

BIBLIOGRAFIA.. 48

U N I D A D E 1
NOÇÃO DE PROPORCIONALIDADE

1 – RAZÃO E PROPORÇÃO

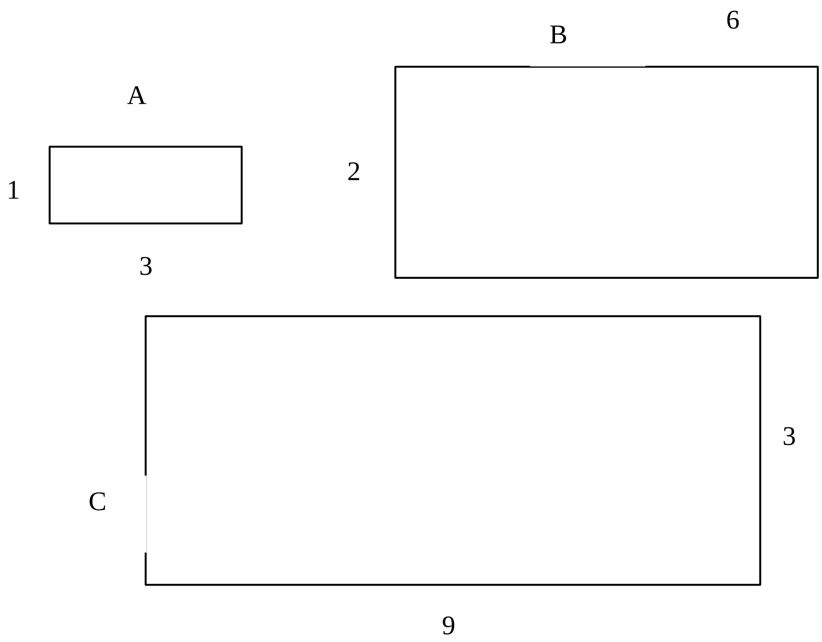
Proporcionalidade é um dos conteúdos da Matemática bastante utilizado na vida diária. Estamos constantemente comparando variações de preços, massa, velocidade, tempo, formas, tamanhos, enfim, tudo o que nos cerca. Essas comparações, muitas vezes, nos facilitam na tomada de decisões.

Veja, por exemplo, quando você vai ao supermercado e vê uma oferta de dois potes de margarina de 250 g por R$ 0,87, enquanto que o pote de 500 g, fora da oferta, custa R$ 1,54. O que você faz para saber qual é a compra mais econômica: os dois potes da oferta ou um pote de 500 g?

A seguir, são apresentadas algumas situações - problemas para que você leia, reflita sobre elas e discuta com seus colegas e professor sobre a questão da proporcionalidade.

Situação - 1

Com o uso de régua meça o retângulos abaixo e escreva na tabela as medidas encontradas.



Medidas em cm	A	B	C
Largura			
Comprimento			
Quociente entre largura e comprimento			

O quociente entre a largura e o comprimento de cada retângulo pode ser representado de diferentes maneiras. Veja:

Retângulo A $\Rightarrow \frac{1}{3}$ ou 1 : 3

Retângulo B $\Rightarrow \frac{2}{6}$ ou 2 : 6

Retângulo C $\Rightarrow \frac{3}{9}$ ou 3 : 9

A divisão é uma das formas que usamos para comparar dois números. A cada quociente damos o nome de **razão**. Dizemos que entre a largura do retângulo **A** e o seu comprimento é de $\frac{1}{3}$ ou 1 : 3, que se lê “um está para três” ou seja, para cada centímetro na largura do retângulo **A**, temos 3 cm no comprimento.

De maneira análoga pode ser feita a leitura das razões das dimensões do retângulo **A** e retângulo **B**. Faça essa leitura e registre em seu caderno.

As razões ou quocientes $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ podem ser escritas na forma simplificada.

Assim: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Como você deve ter notado, em todos os retângulos, da situação 1, a razão entre a largura e o comprimento de seus lados é equivalente a $\frac{1}{3}$.

Então, podemos dizer que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ são frações equivalentes.

Com frações equivalentes sempre podemos formar proporção:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \qquad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \qquad \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Observe que multiplicando “cruzado” obtemos sempre o mesmo valor:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \ \{1 . 6 = 2 . 3 \qquad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \ \{2 . 9 = 6 . 3$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \ \{1 . 9 = 3 . 3$$

À igualdade entre duas razões chamamos de proporção.

- Considere a proporção:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ou 1 : 3 = 2 : 6 (lê-se: um está para três, assim como dois está para seis).

Nessa proporção dizemos que **1** e **6** são os **extremos** e **3** e **2** são os **meios**.

Agora, calcule o produto dos meios e separadamente o produto dos extremos. Você obteve resultados iguais?

- Dada a igualdade $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ ou 2 : 6 = 3 : 9, responda o que se pede.

a) Faça você a leitura dessa proporção.
b) Indique os extremos e meios.
c) Calcule o produto dos meios e separadamente o produto dos extremos.
d) Você obteve resultados iguais?

Se nos dois casos, os resultados obtidos foram iguais, parabéns! Você acertou.

Podemos então dizer que, **em todas as proporções o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.**

Você observou que a razão entre a largura e o comprimento de cada retângulo é $\frac{1}{3}$? Se não percebeu, leia novamente a situação 1.

Quando isso acontece dizemos que a largura e o comprimento desses retângulos são **proporcionais** ou **diretamente proporcionais.**

Uma outra relação a ser observada é que quando a largura do retângulo duplica o comprimento também duplica, quando a largura triplica o comprimento também triplica, isso acontece com grandezas diretamente proporcionais. Portanto:

Quando duas grandezas variam na mesma razão, dizemos que essas grandezas são diretamente proporcionais.

Situação - 2

Um mercado oferece um desconto de 30 centavos na compra de cada 2 litros de leite. Paulo foi ao mercado e comprou 4 litros, Marcos 6 litros e João 10 litros. Represente na tabela abaixo esses dados e resolva as questões indicadas.

	Litros de leite	**Desconto**
Paulo		
Marcos		
João		

a) Escreva a razão entre o desconto e a quantia de litros de leite de cada um.
b) Você obteve razões sempre com o mesmo valor?
c) Com essas razões podemos formar proporções?
d) Podemos dizer que o número de litros de leite é diretamente proporcional ao desconto?

Você observou que quando a quantidade (em litros) de leite duplica, o desconto também duplica. Então se você respondeu que a quantidade de litros é proporcional ao desconto, acertou.

Situação – 3

Três ciclistas, que vamos denominá-lo A, B e C, participaram de uma corrida de 60 km de extensão, com as seguintes velocidades-médias:

Ciclista A $\rightarrow$ 30 km/h; Ciclista B $\rightarrow$ 15 km/h; Ciclista C $\rightarrow$ 10 km/h.

Calcule o tempo que cada ciclista levou para completar a prova, e preencha com esses dados a tabela a seguir:

	Velocidade Média	**Tempo**
Ciclista A	30	
Ciclista B	15	
Ciclista C	10	

Nesta situação temos duas variáveis que se relacionam entre si: velocidade e tempo gasto para percorrer um percurso de 60 km.

Observe na tabela que, quando a velocidade cai pela metade, o tempo ao contrário, duplica. Se a velocidade cai para a terça parte, o tempo ao contrário triplica, e assim por diante. Quando isso acontece dizemos que as grandezas: **velocidade e tempo,** envolvidas nessa situação, são **inversamente proporcionais.**

Com base nos dados que você colocou na tabela, responda:

a) Qual o produto da velocidade pelo tempo gasto por cada ciclista?
b) Você encontrou produtos iguais?

c) Qual o valor do produto?
d) Compare esse produto com a distância percorrida pelos ciclistas. O que você observou?

Se você respondeu que o produto (velocidade x tempo) e a distância percorrida pelos ciclistas, são iguais, muito bem! Acertou. Com base nessa informação, podemos concluir que:

Quando as grandezas são inversamente proporcionais o produto do 1º termo do par pelo 2º, é constante.

Escrevendo na forma irredutível, a razão entre as velocidades dos ciclistas A e B, assim: $\frac{30}{15} = \frac{2}{1}$.

Agora, escreva na forma irredutível a razão entre o tempo gasto pelos ciclistas A e B e compare as duas razões. O que você observou? Com essas razões podemos formar proporções?

Faça o mesmo estudo comparando os ciclistas B e C, isto é, escreva a razão entre as suas velocidades e a razão entre os seus respectivos tempos. Compare-as. O que você observou? Podemos com essas razões formar proporções?

Com todas essas observações e comparações, podemos concluir que nessa situação a velocidade e o tempo variam na **razão inversa.**

Exemplo:

$\frac{30}{10} = \frac{3}{1} \Rightarrow$ razão entre as velocidades dos ciclistas A e C

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ razão entre os tempos dos ciclistas A e C

$\frac{3}{1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ são razões inversas.

Situação - 4

Dona Leoni, que é sindica, contratou uma firma para pintar seu edifício. A previsão foi de que 5 pintores levariam 48 dias para terminar o serviço. Ela pediu, então, que fizessem a previsão para o caso de serem contratados 10 e também 15 pintores.

A tabela abaixo deverá ser completada com o total, em dias, para cada caso. Com base nos dados da tabela, resolva as questões propostas.

Número de Pintores	**Tempo Gasto**
5	48
10	
15	

a) Quando o número de pintores dobra, o que acontece com o tempo necessário para fazer o serviço?
b) Quando o número de pintores triplica, o que acontece com o tempo?
c) O número de pintores e o tempo gasto para pintar são grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?
d) Qual a razão, na forma irredutível, quando o número de pintores passa de 5 para 10.
e) Como escrevemos, na forma irredutível, as razões entre os tempos dos mesmos pintores (48 para 24).

ATIVIDADE - I

1) Num teste de 12 questões Márcio acertou 7. Nestas condições, complete:

a) A razão do número de acertos de Márcio para o número total de questões do teste é...
b) A razão do número total de questões do teste para o número de acertos de Márcio é...
c) As razões acima são chamadas razões...................................

2) Numa receita de bolo são necessários 4 ovos. Complete a tabela abaixo para mostrar o número de ovos, caso se queira fazer 3 ou 5 receitas de bolo e, com base nos dados da tabela resolva as questões propostas.

Nº de receitas de bolo	1	3	5
Nº de ovos	4		

a) Escreva as razões na forma irredutível, entre o número de receitas de bolo e o número de ovos correspondentes.
b) As razões são iguais?
c) Nesta situação, as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais?

3) Vitor fez uma prova de matemática com 12 questões. A razão entre o número de questões que ele acertou e o número de questões que havia na prova é de $\frac{3}{4}$.
Nessas condições responda:

a) Quantas questões Vitor acertou ?
b) Quantas questões Vitor errou?
c) Qual a razão entre o número de questões que ele errou e o número de questões que ele acertou?

4) Júlio tem 24 anos e seu filho tem a oitava parte da idade do pai. Qual é a razão entre a idade do pai e a idade do filho? Qual é a razão entre a idade do filho e a idade do pai?

5) A família de D. Amélia consome 3 quilos de arroz e 2 quilos de feijão em 5 dias. D. Amélia vai ao mercado e quer comprar arroz e feijão para alimentar a sua família durante 30 dias. Complete a tabela abaixo indicando o número de arroz e de feijão que D. Amélia terá de comprar.

Nº de Dias	**Quilos de arroz**	**Quilos de Feijão**
5	3	2
30		

a) Entre os números de dias.
b) Entre os números de quilos de feijão.
c) Entre os números de quilos de arroz.

Agora responda:

d) Você obteve razões sempre com o mesmo valor?
e) Com essas razões podemos formar proporções?

2 – REGRA DE TRÊS

Há quem diga que as pessoas que sabem lidar com a “regra de três” conseguem resolver mais da metade dos problemas do cotidiano, da Matemática, da Química, da Geografia, enfim, das Ciências de um modo geral. Você acredita nisso?

Se você não sabe responder a essa pergunta, leia e analise cada uma das situações, a seguir, e depois dê a sua opinião sobre o parágrafo acima.

Situação - 1

Aninha faz refresco de uva, misturando 2 copos de suco concentrado com 3 copos de água. Em 5 copos de suco concentrado, quantos copos de água Aninha deve misturar?

Vamos indicar por **x** essa quantidade de copos de água e organizar os dados numa tabela:

Suco Concentrado	**Água**
2	3
5	x

Vamos analisar essa situação da seguinte maneira:

Se duplicamos o suco concentrado, temos que duplicar a água. Logo as duas grandezas são **diretamente proporcionais.** Então, 2 e 5 são proporcionais a 3 e x.

Por isso, podemos escrever a proporção na mesma posição em que os números aparecem na tabela.

Assim: $\frac{2}{5} = \frac{3}{x}$

Você já viu que em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Logo: $\frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow$ Se 2x é igual a 15, então um x é igual a metade, ou seja 7,5.

$$x = \frac{15}{2}$$

$$x = 7{,}5$$

Aninha deve misturar 7 copos e meio de água, para 5 copos de suco concentrado.

Nesse tipo de cálculo, se conhecem três termos e o quarto (x) é procurado. Daí o nome **regra de três**. Como as grandezas são diretamente proporcionais. A regra de três é **direta.**

Situação - 2

Para 2 pedreiros murarem um terreno, são necessários 5 dias. Quantos dias são necessários para 5 pedreiros, nas mesmas condições, murarem esse mesmo terreno?

Vamos indicar por x esse número de dias e organizar os dados numa tabela:

Quantidade de pedreiros	**Dias utilizados**
2	5
5	x

Se duplicarmos o número de pedreiros, o número de dias cairá para a metade (razões inversas). Logo, as grandezas são **inversamente proporcionais.** Então 2 e 5 são inversamente proporcionais a 5 e x.

Por isso, para escrever a proporção, temos que inverter a posição dos números de uma das colunas da tabela. Assim:

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{x}$$

Agora temos uma proporção, então o produto dos meios é igual ao produto dos extremos:

Portanto, serão necessários 2 dias para que 5 pedreiros façam o muro desse terreno.

Como as grandezas envolvidas nesse cálculo são inversamente proporcionais, a regra de três é **inversa.**

ATIVIDADE - II

1) Um granjeiro tem ração para alimentar 300 galinhas durante 15 dias. Resolve comprar mais 150 galinhas. Se a ração de cada galinha não foi diminuída, para quantos dias dará a ração?

2) Um gramado foi podado por 3 homens que trabalharam 6 dias. Para conseguir podar esse gramado em 2 dias, quantos homens serão necessários?

3) Um pedreiro usa 20 quilos de cimento em cada 4 latas de areia para fazer uma massa de reboco. Quantas latas de areia são necessárias para fazer a mesma massa usando 50 quilos de cimento?

4) Com 2 limões Edmar faz 6 copos de limonada. Usando 5 limões da mesma qualidade, quantos copos da mesma limonada Edmar pode fazer?

5) Gilberto tem uma foto 6 por 8 (6 cm de largura e 8 cm de altura) e deseja ampliá-la para fazer um pôster com 40 cm de altura. Qual será a largura do pôster?

6) Um poste de quatro metros projeta uma sombra de 5 metros. Nesse mesmo instante um pinheiro projeta uma sombra de 15 m. Qual será a altura do pinheiro?

7) Para se fazer um doce de abóbora, utilizou-se 500 gramas de açúcar-cristal e 2 quilos de abóbora. Quantos gramas de açúcar-cristal serão necessários para se fazer o mesmo doce utilizando 6 quilos de abóbora?

8) Em uma prova de valor 8, Airton tirou nota 5,6. Qual seria a nota de Airton se o valor da prova fosse 10?

9) Doze pescadores partem para alto mar, levando reservas alimentares suficientes para 30 dias, mas dão abrigo a 3 pessoas cujo barco afundou. Quantos dias vão durar as reservas alimentares?

10) Um carro com a velocidade média de 63 km/h, faz o percurso entre duas cidades em 12 horas. Quanto tempo levaria para fazer o mesmo percurso se a velocidade média fosse 84 km/h?

3 - PORCENTAGEM

As expressões **por cento** são freqüentemente usadas nas mais diversas ocasiões.

Nas noticias que ouvimos no rádio ou na televisão:

- Salários sobem 12%
- O rendimento da caderneta de poupança foi de 1,7%.

Nos folhetos que encontramos nos supermercados, lojas, farmácias promovendo suas mercadorias:

Nos anúncios em jornais e revistas, elas aparecem nas reportagens, nas entrevistas, como mostra os dados do gráfico a seguir:

Estudaremos agora, o significado dessas expressões e, como efetuamos o cálculo de porcentagem.

Situação - 1

O chefe de recursos humanos de uma empresa declarou:

“O salário dos funcionários de nossa empresa vai aumentar 20 por cento”.

Nessa empresa os serventes ganham 230 reais, os escriturários, 460 reais, os chefes de seção, 540 reais e outras categorias, 420 reais.

Vamos determinar, de diferentes maneiras, o valor do aumento de salário desses funcionários, de acordo com suas funções.

1) Resolução Aritmética:

Aqui temos que achar 20 por cento do salário de cada categoria.

Em lugar da expressão por cento, podemos usar o símbolo %

Então 20 por cento = 20% = $\frac{20}{100}$ = 0,20

Portanto, 20% é o mesmo que 0,20 vezes o salário de cada uma das categorias profissionais.

Com base nesses dados podemos calcular o aumento de cada categoria. Observe e calcule.

- Serventes ⇒ 0,20 de 230 = 0,20 x 230 = 46
- Escriturário ⇒ 0,20 de 460
- Chefes de Seção ⇒ 0,20 de 540
- Outras seções ⇒ 0,20 de 420

Você sabe um outro "jeito" de resolver esse problema? Justifique sua resposta.

Agora, verifique qual é o salário de cada categoria considerando o aumento de 20%.

2) Solução Algébrica:

O que significa 20% de aumento?

Nesse caso, significa que cada categoria terá um aumento de 20 reais, em cada 100 reais de seu salário.

No caso do salário dos serventes, teremos:

Se em cada 100 reais, 20 reais de aumento, então no total de 230 reais teremos de aumento a quantia desconhecida "x" que iremos determinar.

Na tabela:

Salário	**Aumento**
100	20
230	x

Veja:

Se duplicarmos o salário, o aumento também duplica, logo as grandezas acima são **diretamente proporcionais,** então podemos escrever a proporção:

$$\frac{100}{230} = \frac{20}{x}$$

100 x = 230 . 20

100 x = 4600

$$x = \frac{4600}{100}$$

x = 46

Observe que o termo desconhecido "x" é igual a 46 reais, o que eqüivale ao aumento de 20% sobre o salário de 230 reais de categoria dos serventes.

Na solução algébrica trabalhamos com números e letras. A letra "x" representa uma incógnita, isto é, valor desconhecido que iremos determinar.

Situação - 2

Na compra de um par de tênis, Fernando obteve um desconto de 12%, pagando então, R$44,00. Nessas condições, qual era o preço real, sem desconto, desse tênis.

1) Resolução Aritmética:

Para resolver esta situação, temos que achar o preço real do tênis, que corresponde a 100%. Ele sabe que pagou o correspondente a 100% - 12% = 88% do valor real do tênis, então 88% correspondem a R$44,00.

Como ele quer saber quantos reais correspondem a 100% basta descobrir qual é o número que multiplicado por 88% resultou 44.

Para achar esse número temos que dividir 44 por 88%.

Como 88% corresponde a 0,88, efetuamos a divisão de 44 por 0,88 e obtemos 50 reais.

Então chegamos a conclusão que o preço real, sem desconto, do tênis era R$50,00.

2) Solução Algébrica:

Você observou que Fernando pagou 44 reais pelo tênis, o que corresponde a 88% do valor real? O que se procura é o valor que corresponde a 100% do preço deste tênis, o qual representamos pela letra “x”.

Na tabela:

Porcentagem	**Valor**
88	44
100	x

Como as grandezas acima são diretamente proporcionais, podemos escrever a proporção:

$$\frac{88}{100} = \frac{44}{x}$$

$$88\,x = 100 \,.\, 44$$

$$88\,x = 4400$$

$$x = \frac{4400}{88}$$

$x = 50 \Rightarrow$ preço real do tênis

ATIVIDADE - III

1) O proprietário de uma loja compra camisetas por R$ 12,00. Ele deseja vendê-las tendo um lucro de 40% sobre o preço de custo. Por quanto deve ser vendida cada camiseta?

2) Um agente imobiliário recebe uma comissão de 5% sobre qualquer venda que faça. Quanto receberá na venda de uma casa por R$17.500,00?

3) Um vendedor de uma loja de eletrodomésticos recebeu R$4,25 e comissão na venda de um aspirador de pó que foi vendido por R$85,00. Qual a porcentagem de sua comissão?

4) Uma loja de artigos esportivos anuncia um liquidação de equipamentos para futebol. O desconto é de 20%.

a) Qual será o preço de liquidação de uma bola que custa R$7,00?
b) E de uma chuteira cujo preço é R$28,00?
c) Qual será o valor do desconto de um par de luvas para goleiro, cujo preço é R$9,00?

5) Um anúncio diz que uma bicicleta pode ser comprada a prestações com uma entrada de R$147,00, que corresponde 25% do seu preço. Quanto custa a bicicleta?

6) Um comerciante vende um televisor por R$654,00 tendo um lucro de 18% sobre o peço de custo. Qual o preço de custo desse televisor?

7) Na compra de um par de tênis paguei com acréscimo de 6% por ter feito o pagamento em 30 dias. Se paguei R$37,10 pelo par de tênis, qual era o seu preço original?

8) Numa determinada loja o preço de uma geladeira é 1320 reais. Durante uma promoção está vendida com um desconto de 15%. Qual é o valor do desconto?

U N I D A D E 2
SEMELHANÇA

1 – TEOREMA DE TALES

Você já ouviu falar nas pirâmides do Egito? É provável que sim, porque elas são famosas no mundo inteiro.

Naquele tempo já era possível medir a altura dessas pirâmides. A história conta que o filósofo e matemático Tales de Mileto, em um de suas viagens ao Egito, ficou famoso por ter medido a altura de uma dessas pirâmides sem a necessidade de subir até o seu vértice.

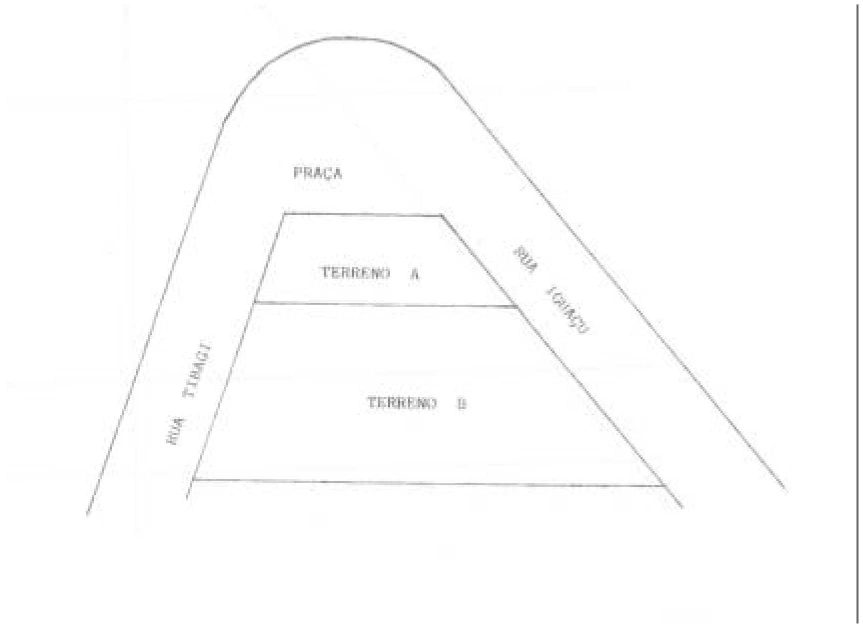
Sabe como ele fez essa façanha?

Fincou uma estaca verticalmente no chão e observou que no momento em que o comprimento da sombra da estaca fosse igual ao comprimento da estaca, a altura da pirâmide seria igual ao comprimento da sombra da pirâmide mais a metade da medida da base.

Situação - 1

A planta abaixo mostra dois terrenos A e B, cujas frentes estão para a rua Tibagi, fundos para a rua Iguaçu e as laterais são paralelas. Observe com atenção:

Meça, com régua, as frentes e os fundos de cada terreno e complete a tabela



abaixo:

	Frentes	Fundos
Terreno A		
Terreno B		

Vamos calcular a razão entre as medidas das frentes desses dois terrenos. (A para B).

Assim: $\frac{2}{4}$ = 0,5

Agora, calcule você a razão entre as medidas dos fundos dos terrenos A e B.

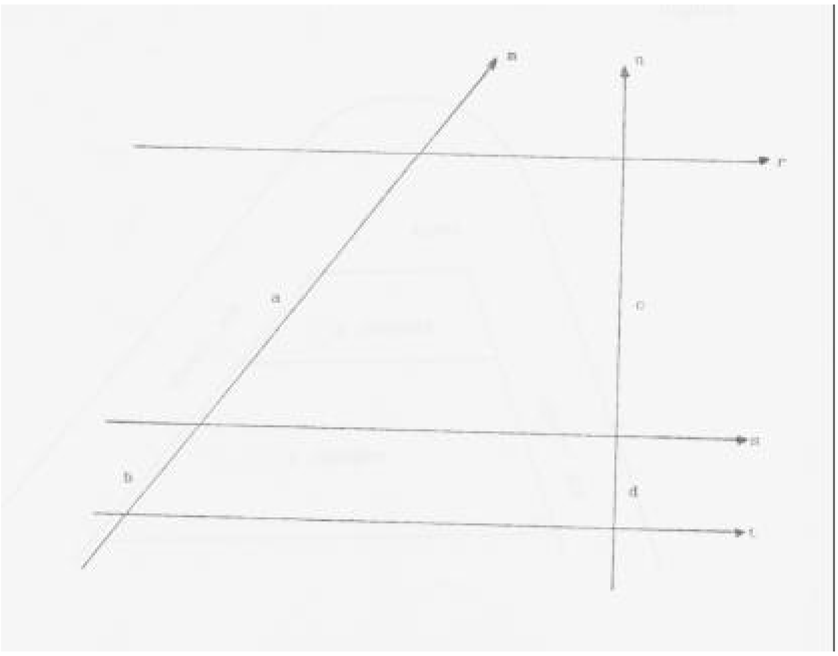
Comparando essas razões, o que você observa?

Como as razões são iguais, podemos dizer que as medidas das frentes e e dos fundos dos terrenos A e B são proporcionais.

Então $\frac{2}{4} = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$

Situação - 2

As retas r, s e t são paralelas, as retas m e n são chamadas de **transversais.**



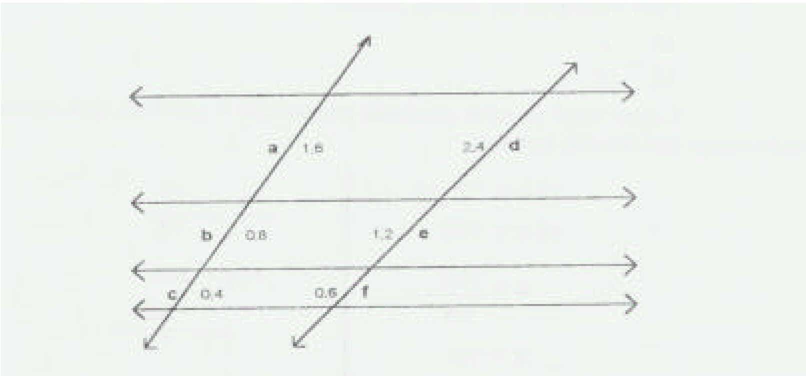
Meça com régua os segmentos cujas medidas são a, b, c, d, em cm. Em seguida calcule as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Compare as razões. O que você observa?

Podemos dizer que os segmentos de medidas a, b, c, d, são proporcionais? Por quê?

Situação - 3

Na figura a seguir, as retas r, s, t, u são paralelas. Com as medidas dos segmentos a, b, c, d, e, f determine as razões: $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$.



Comparando as razões, o que você observa?

Podemos então dizer que os segmentos de medida a, b, c, d, e, f são proporcionais? Se os segmentos são proporcionais é válida a seguinte relação:

$$\frac{1,6}{0,8} = \frac{0,8}{0,4} = \frac{2,4}{1,2} = \frac{1,2}{0,6}.$$

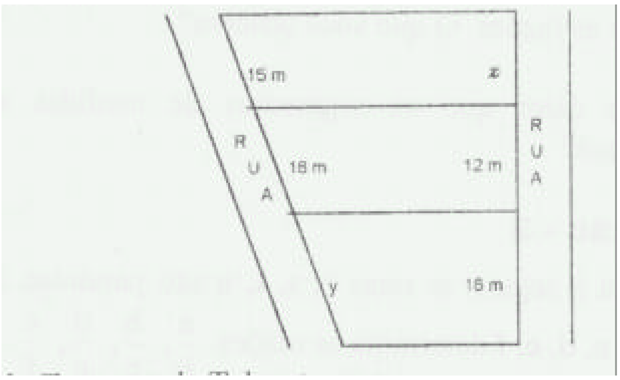
Essa relação é conhecida como Teorema de Tales, em homenagem ao matemático grego Tales (624 – 548 a.c., aprox.) a quem foi atribuído o seu desenvolvimento.

Enunciado do Teorema de Tales:

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais

Situação - 4

A planta abaixo mostra três terrenos cujas laterais são paralelas. Quais são os valores de x e y em metros?



Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{15}{18} = \frac{x}{12}$$

Como você já sabe em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto do meio, temos:

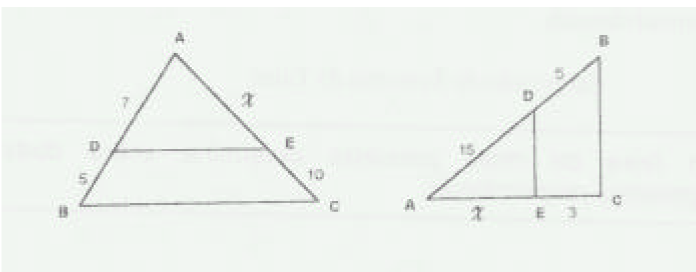
$18x = 12 . 15$
$18x = 180$
$x = \frac{180}{18}$
$x = 10$

$\frac{18}{y} = \frac{12}{18}$
$12y = 324$
$y = \frac{324}{12}$
$y = 27$

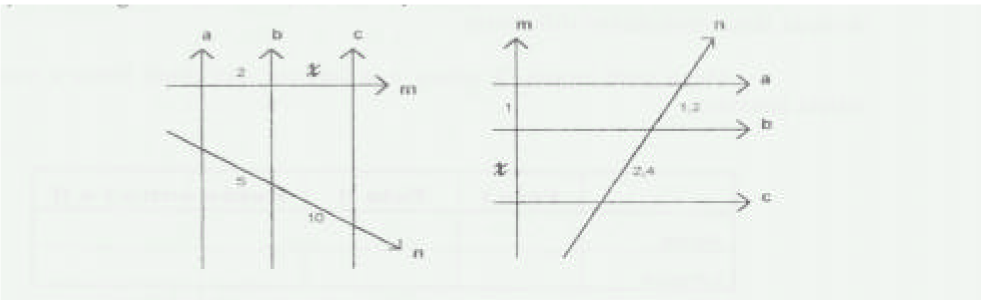
As medidas das distâncias representadas por x e y, são respectivamente: 10m e 27m.

ATIVIDADE - IV

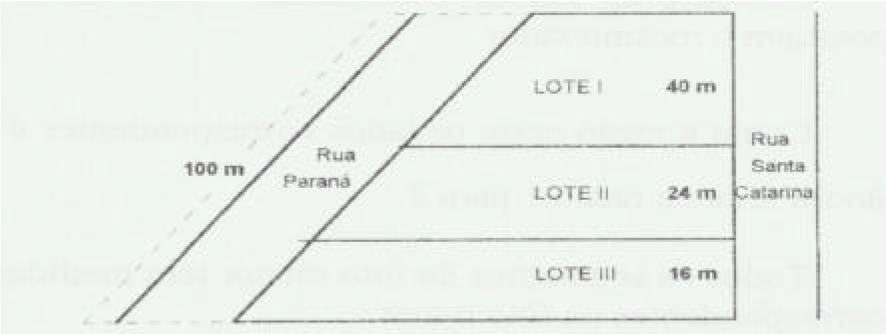
1) Calcule o valor de x em cm, nas figuras abaixo, sabendo que DE é paralela a BC.



2) Nas figuras abaixo a, b, c são paralelas. Determine os valores de x.



3) Na planta abaixo temos três lotes cujas laterais são paralelas. Calcule as medidas das frentes destes lotes que dão para a rua Paraná.

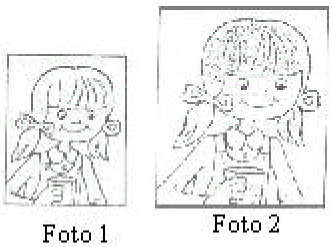


2 – FIGURAS SEMELHANTES

Geralmente a palavra semelhante quer dizer parecido. Em Matemática, dizemos que duas coisas são **semelhantes** quando apresentam a mesma forma, que tenham tamanhos diferentes.

Situação - 1

Observe as fotos abaixo:



Só de olhar, dá para perceber que ambas têm a mesma forma, apesar de seus tamanhos serem diferentes.

Meça com régua, a altura e a largura das duas fotos e complete a tabela abaixo:

	Foto I	**Foto II**	**Razão entre I e II**
Altura			
Largura			

Compare as razões encontradas. Você deve ter observado que as razões possuem o mesmo valor.

Como a razão entre os lados correspondentes é $\frac{1}{2}$ podemos dizer que a redução foi feita na razão 1 para 2.

Todos os segmentos da foto menor tem medidas duas vezes menor do que as correspondentes na foto maior.

Nas fotos I e II, os lados correspondentes são proporcionais, portanto podemos escrever: $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

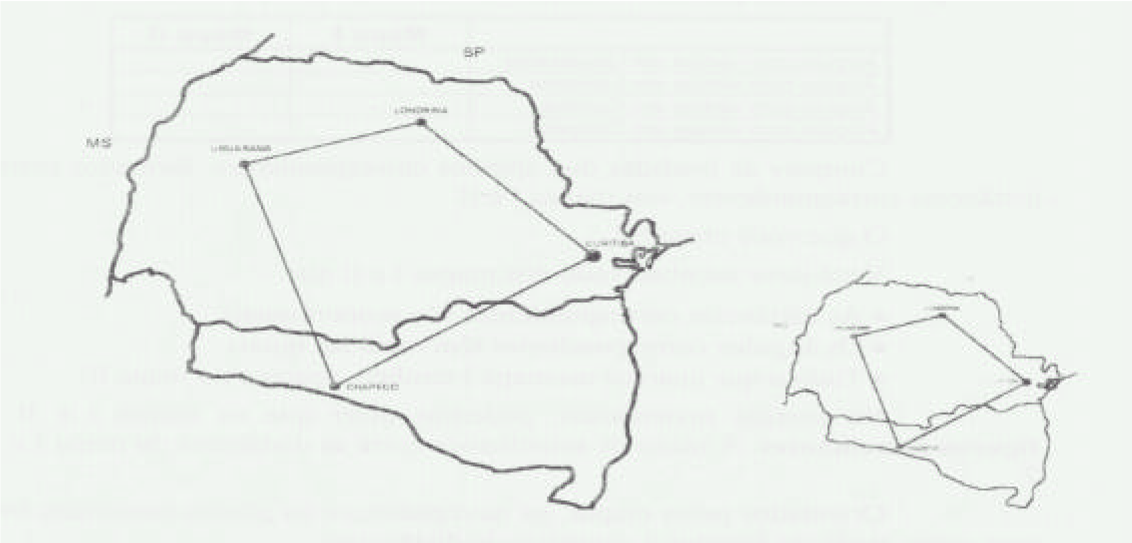
As razões $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ podem ser escritas na sua forma reduzida $\frac{1}{2}$. Essa razão constante entre os lados correspondentes de figuras semelhantes chamamos em Matemática, de **razão de semelhança.**

A foto e sua ampliação ou redução, são sempre figuras semelhantes. A escala é a razão de semelhança, no caso $\frac{1}{2}$.

Este procedimento é utilizado por engenheiros e arquitetos na confecção de maquetes e plantas.

Situação - 2

Observe os mapas abaixo:



Estes mapas são de uma mesma região, mas estão em escalas diferentes.

Com a régua una Umuarama – Londrina, Londrina – Curitiba, Chapecó – Curitiba e Umuarama – Chapecó nos mapas I e II.

Meça essas distâncias e complete a tabela abaixo:

	Mapa I	Mapa II	Razão entre as distâncias
Umuarama – Londrina			
Londrina – Curitiba			
Curitiba – Chapecó			
Chapecó – Umuarama			

Compare as razões encontradas. O que você observa?

Como as razões são iguais, as distâncias correspondentes são **proporcionais**, então podemos escrever $\frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = \frac{3}{1,5} = 2$.

Situação - 3

Meça com transferidor, os ângulos dos quadriláteros que você obteve nos mapas I e II e complete a tabela abaixo:

	Mapa I	**Mapa II**
Ângulo com vértice em Umuarama		
Ângulo com vértice em Londrina		
Ângulo com vértice em Curitiba		
Ângulo com vértice em Chapecó		

Compare as medidas dos ângulos correspondentes, formados entre as distâncias correspondentes, nos mapas I e II.

O que você observa?

Você deve ter observado nos mapas I e II que:

- As distâncias correspondentes são proporcionais.
- Os ângulos correspondentes têm medidas iguais.
- Tudo o que aparece no mapa I também aparece no mapa II.

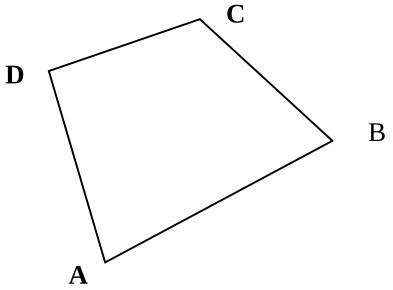
No sentido matemático, podemos dizer que os mapas I e II são **figuras semelhantes.** A razão de semelhança entre as distâncias do mapa I e II é 2.

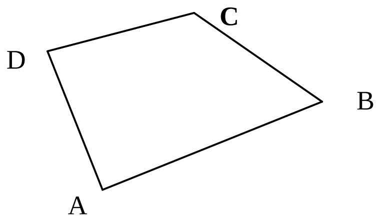
Orientados pelos mapas, os navegadores e os pilotos costumam traçar suas rotas, medindo ângulos e comparando distâncias.

Conhecendo a escala do mapa, eles podem avaliar a distância a ser percorrida.

Situação - 4

Note que os dois polígonos abaixo representam as distâncias entre as cidades consideradas no mapa I e II:





Lados correspondentes

AB ® A’B’
BC ® B’C’
CD ® C’D’
DA ® D’A’

Ângulos correspondentes

Â ® Â’
B ® B’
C ® C’
D ® D’

Observe que:

- Os ângulos correspondentes têm medidas iguais.

- Os lados correspondentes são proporcionais: $\frac{5}{2,5} = \frac{3}{1,5} = \frac{4}{2} = \frac{5}{2,5}$.

Sempre que essas duas condições forem satisfeitas, dizemos que os **polígonos são semelhantes.**

Situação - 5

Agora desenhe dois triângulos com as seguintes medidas dos lados:

Triângulo I – 6 cm, 3 cm e 7,5 cm.
Triângulo II – 4 cm, 2 cm e 5 cm.

- Verifique se os lados correspondentes são proporcionais.
- Com transferidor, meça os ângulos dos triângulos I e II.
- Compare as medidas dos ângulos correspondentes nos triângulos I e II.
- O que você observa?

Nos triângulos, se os lados forem proporcionais, os ângulos correspondentes serão iguais e vice-versa.

Assim, basta verificar somente uma das duas condições para conferir a semelhança:

Todos os triângulos com lados correspondentes proporcionais são semelhantes.

ou

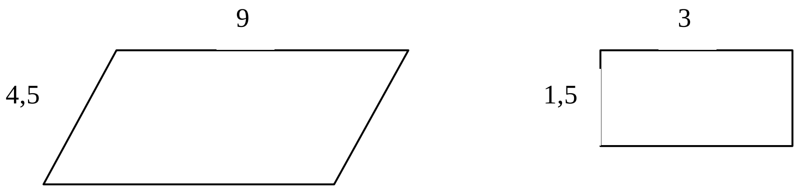
Todos os triângulos com ângulos correspondentes de medidas iguais são semelhantes.

Esta propriedade é válida somente para os triângulos. Em qualquer outro polígono a proporcionalidade dos lados não garante a igualdade dos ângulos e vice-versa.

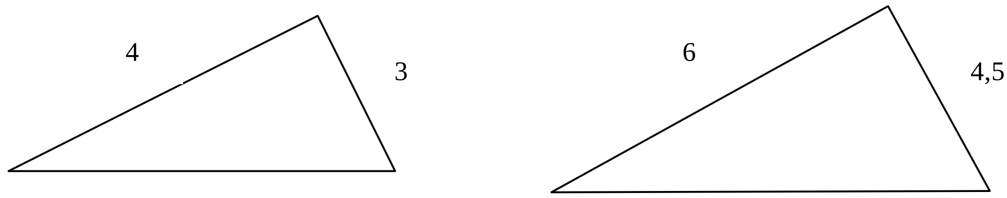
ATIVIDADE - V

1) Verifique se são semelhantes os polígonos abaixo. Justifique sua resposta.

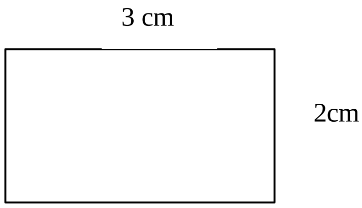
a)



b)

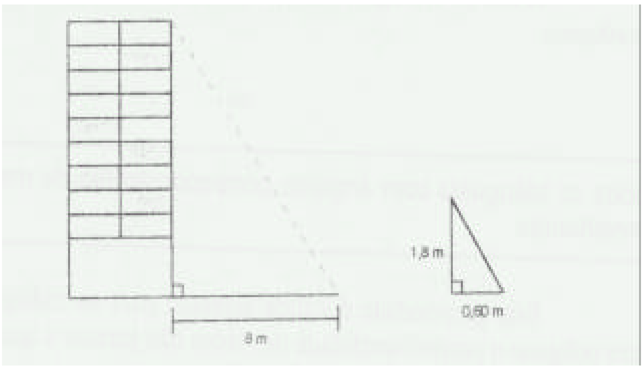


2) A sala de casa de Marcelo tem forma retangular medindo 6 m de comprimento por 4 m de largura. Marcelo fez o desenho abaixo para representá-la.



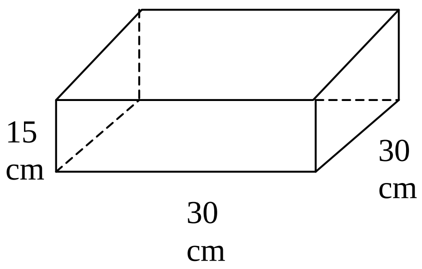
Verifique e responda:
O desenho ficou semelhante a sala original? Justifique.

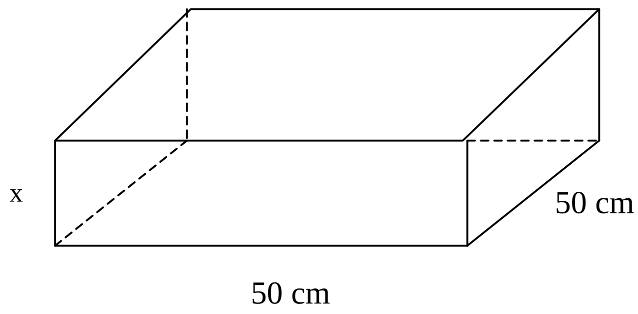
3) Um prédio projeta uma sombra de 8 m no solo no mesmo instante em que uma estaca de 1,80 m projeta uma sombra de 0,60 m no solo, como mostra o desenho abaixo. Determine a altura do prédio.



4) Uma garrafa de coca-cola de um litro mede 32 cm de altura e o diâmetro da base é 8 cm. Deseja-se fabricar uma miniatura de 6 cm de altura semelhante a garrafa grande. Qual deve ser o diâmetro da base dessa miniatura?

5) O bolo do aniversário do Murilo tinha a forma de uma caixa com base quadrada cujo lado da base media 30 cm e a altura era de 15 cm. O Fernando em seu aniversário, quer um bolo semelhante ao bolo do aniversário do Murilo, com base medindo 50 cm. Qual deve ser a altura do bolo do aniversário de Fernando?





UNIDADE 3
NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

Você conhece esse refrão?

"Mais vale um simples desenho do que um longo discurso".

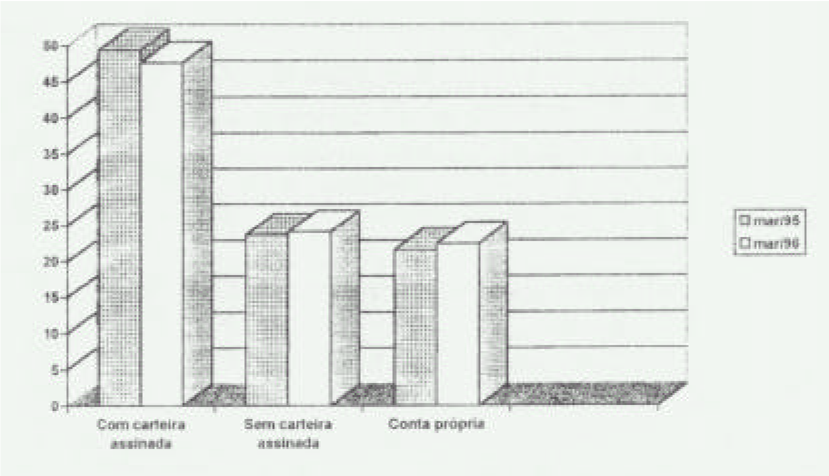
Hoje, vivemos numa sociedade tecnológica onde a linguagem visual assume um papel fundamental.

Os meios de comunicação utilizam a linguagem gráfica para comunicar os fatos cotidianos, ou fatos científicos das diversas áreas do conhecimento humano.

Observe e analise algumas dessas publicações feitas em jornais e revistas.

1. MERCADO DE TRABALHO

participação % em relação ao total de trabalhadores.

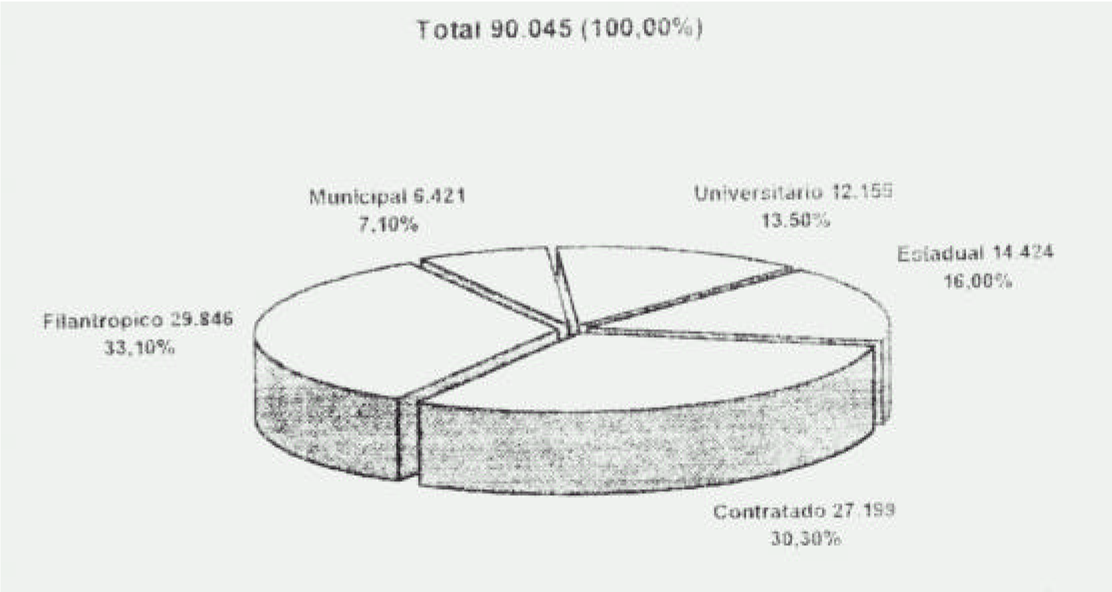


Fonte: Folha de São Paulo. 9 de maio de 1996

2.

Fonte: Veja, 9 de novembro de 1994

3 -NÚMERO DE LEITOS NO SUS



Observando os gráficos 1, 2 e 3, podemos chegar a conclusão de que cada vez mais os meios de comunicação utilizam gráficos e tabelas para facilitar a leitura de fatos como o dessas reportagens e de outras, tais como:

- Índice de oferta de emprego, da inflação e das perdas salariais.
- Produção de uma indústria.
- Intenção de votos numa eleição.
- Distribuição de renda entre a população de uma região.
- Exportação de alguns países em determinado tempo.
- Acidentes de trânsito.
- E outros.

Para o estudo desses gráficos e tabelas, vamos recorrer a uma Ciência que chamamos de Estatística.

Através da análise de determinados dados organizados em tabelas e gráficos, é possível fazer diagnóstico de um problema para tomada de decisão e elaboração de planejamento para a solução do mesmo, isso em vários campos de trabalho. Portanto, podemos dizer que, Estatística é um conjunto de métodos que possibilitam a tomada de decisões corretas frente à incerteza.

1 – ANÁLISE DE TABELAS E GRÁFICOS

Situação - 1

Suponha que você trabalhe no setor de planejamento de uma loja de eletrodomésticos e tenha em mãos uma tabela com dados, mês a mês, da venda e geladeiras dessa loja.

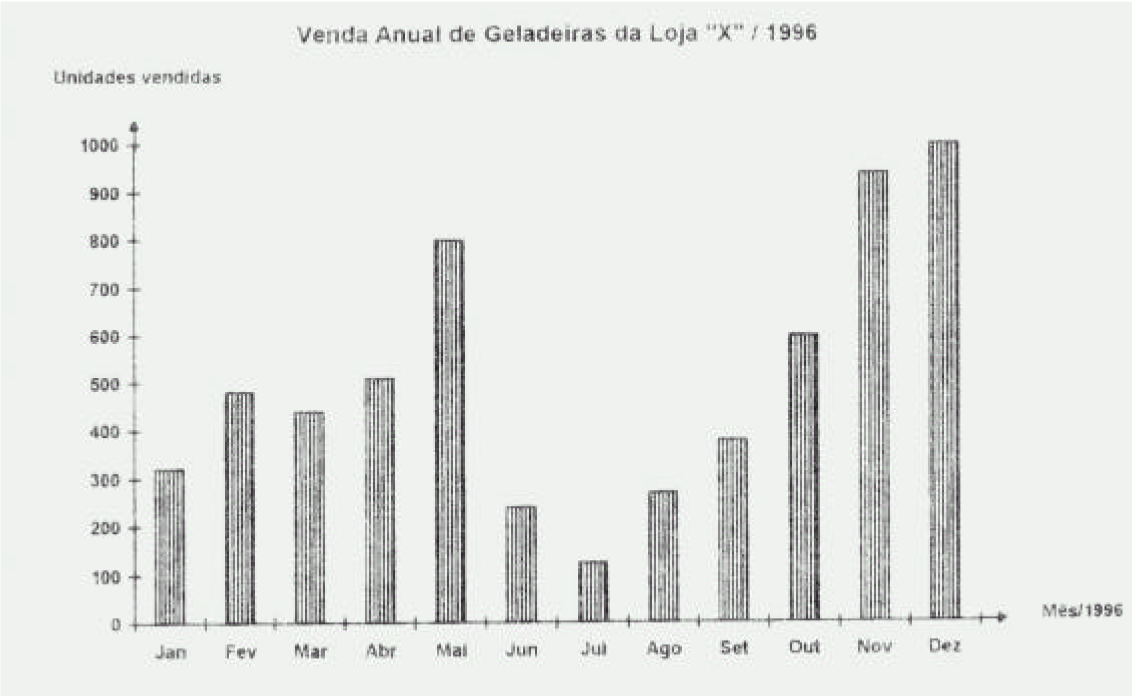
Observe

Venda Anual de Geladeiras Da Loja "X" / 1996	
MÊS	**UNIDADES**
Janeiro	320
Fevereiro	480
Março	440
Abril	510
Maio	800
Junho	240
Julho	125
Agosto	270
Setembro	380
Outubro	600
Novembro	940
Dezembro	1000

Veja que a organização das datas em uma tabela facilita a leitura das mesmas, mas a visualização dos pontos máximos e mínimos de venda, a alteração mês a mês, análises não são de visualização imediata.

Nesse, como em outros casos, recorremos aos gráficos para que visualizemos melhor a situação.

Veja:



Analisando o gráfico responda rapidamente as seguintes perguntas:

a) Em que mês houve a maior venda?
b) E a menor?
c) Quantas unidades foram vendidas nos meses de outubro e dezembro?
d) Em que período houve vendas crescentes por mais de três meses?

Para você pesquisar junto a uma loja de eletrodomésticos de sua cidade.

a) Qual é o mês em que, se vende o maior número de geladeiras?
b) E a menor?

Situação - 2

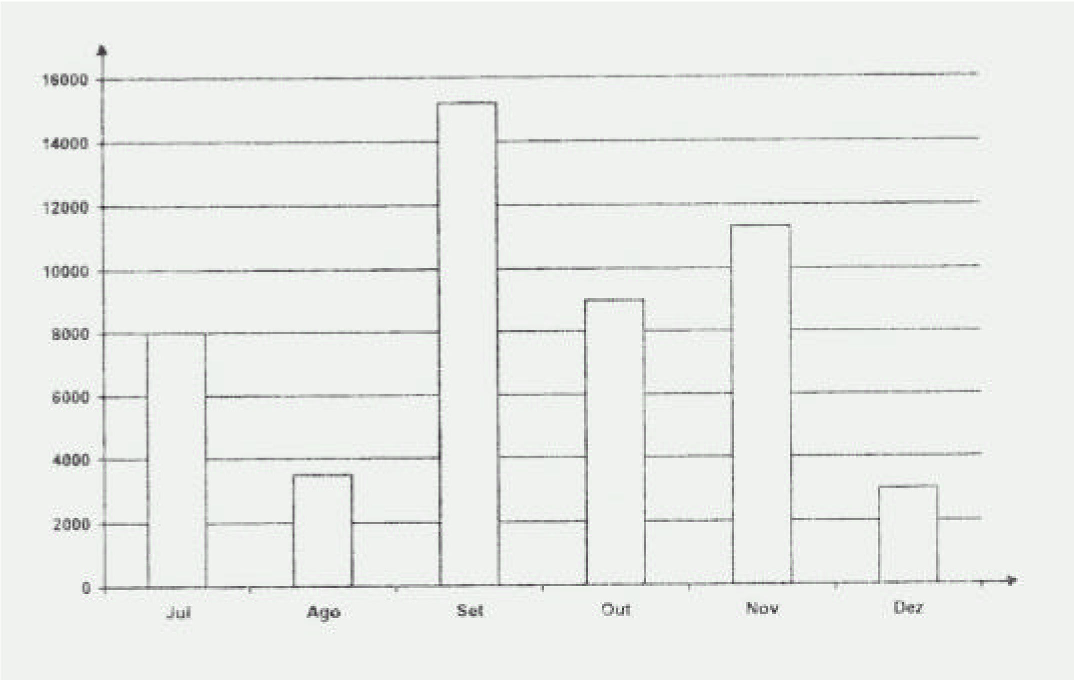
A tabela abaixo mostra a produção de uma indústria de automóveis durante o 2º semestre de 1993.

Meses	**Número de automóveis**	**Porcentagens**
Julho	8 000	16%
Agosto	3 500	7%
Setembro	15 200	30,4%
Outubro	9 000	18%
Novembro	11 300	22,6%
Dezembro	3 000	6%
Total	**50 000**	**100%**

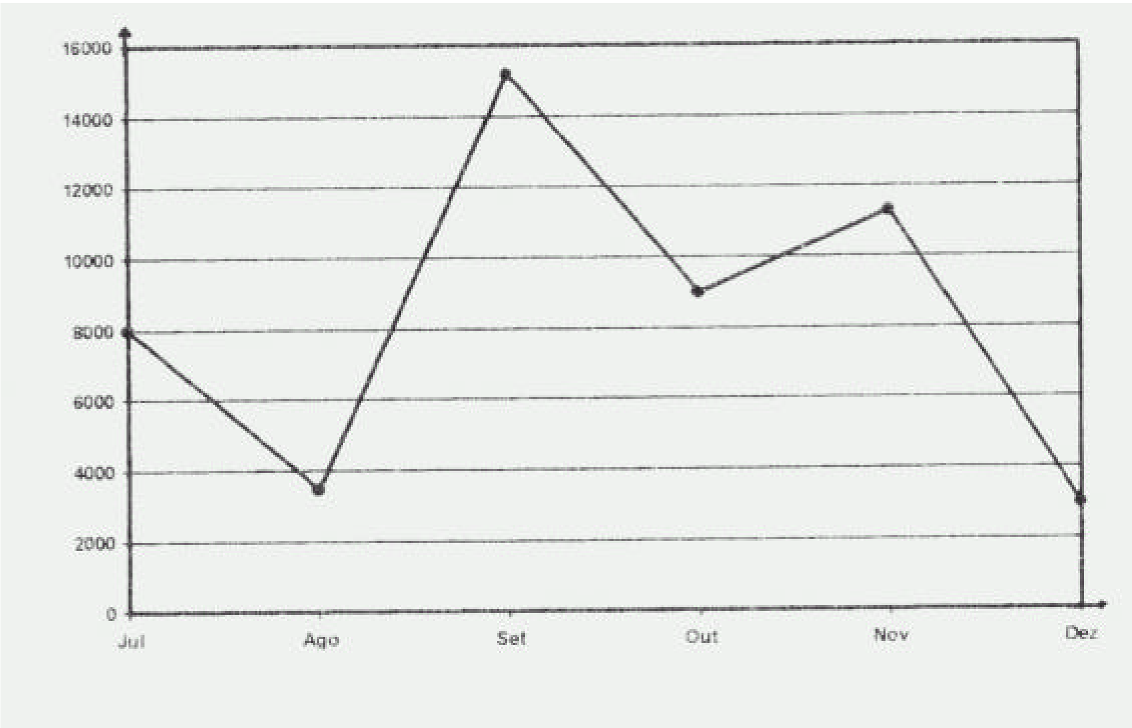
As porcentagens referem-se à distribuição da população do semestre que foi de 50 000 automóveis.

Esses dados organizados na tabela vista, podem ser representados em gráficos de **barras**, de **linhas** e de **setores.**

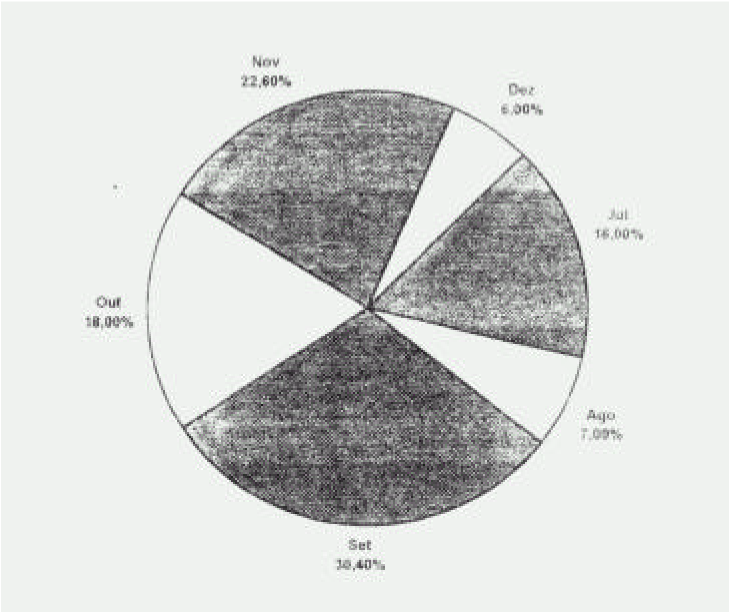
REPRESENTAÇÃO EM GRÁFICOS DE BARRAS



REPRESENTAÇÃO EM GRÁFICOS DE LINHAS



REPRSENTAÇÃO EM GRÁFICOS DE SETORES



Na situação 1, você fez a análise da venda anual de geladeiras da loja “X”.

Na situação 2 você verificou a possibilidade de mostrar a produção de automóveis de uma indústria durante o 2º semestre de 1993 de maneiras diferentes, ou seja, através de uma tabela, ou de gráficos de barras, de linhas e de setores.

2 – PLANO CARTESIANO

Mas como proceder na construção desses gráficos estatísticos?

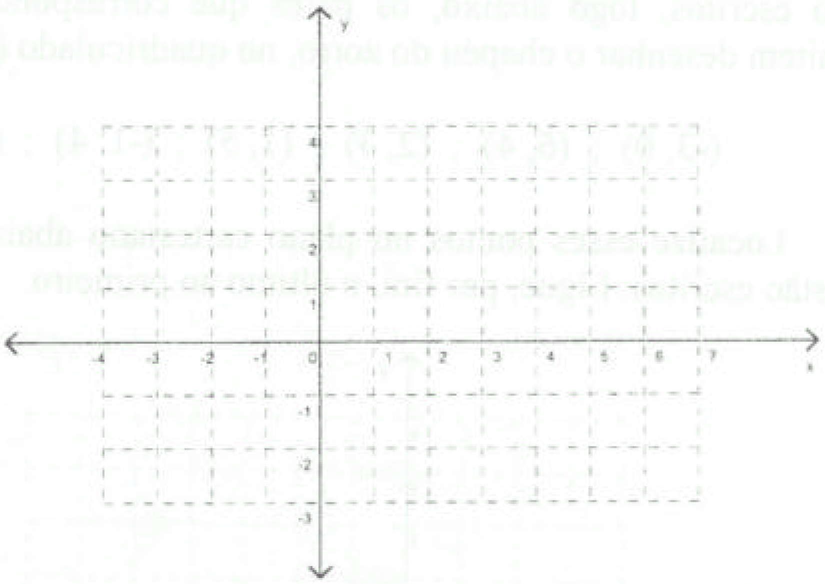
O ponto de partida é o conhecimento do plano cartesiano para a construção dos gráficos de barras e de linhas, de noção de ângulo, de divisão da circunferência e porcentagens nos gráficos de setores.

O plano cartesiano foi criado no início do século XVII, pelo matemático e filósofo francês René Descartes e foi uma das mais úteis e importantes invenções matemáticas, pois tem aplicações na medicina, engenharia, economia, etc.

Considere a situação:

Os seguintes pares ordenados correspondem aos pontos que permitirão desenhar um barquinho no quadriculado:

(3, 1); (4, 1); (5, 1); (6, 2); (4, 2); (4, 4); (2, 2)



Para marcar o ponto (3, 1) no quadriculado procedemos assim:

- O primeiro número do par é 3, então saímos do ponto zero e "caminhamos" na horizontal, 3 unidades para a direita.
- O segundo número do par é 1, então a partir do 3 "caminhamos" uma unidade para cima e marcamos o ponto (3, 1) (observe: ele já marcado no quadriculado).

Procedendo sempre dessa maneira, marque os outros pontos, una-os na ordem em que foi escrito para obter o desenho do barquinho.

A reta horizontal é o **eixo das abscissas** (x) e a vertical **eixo das ordenadas** (y). Os pares de números usados são chamados **pares ordenados** porque é escrito nesta ordem:

- Primeiro o número que pertence ao eixo x e depois o número que pertence ao eixo y.

Cada par ordenado de números (x, y) é chamado **coordenadas** do ponto. Sendo assim, na situação anterior, o primeiro ponto é representado pelo par ordenado (3, 1), sendo 3 e 1 suas coordenadas.

O plano determinado pelas retas x e y é o que chamamos de plano cartesiano. O ponto de encontro das duas retas é chamado origem e é

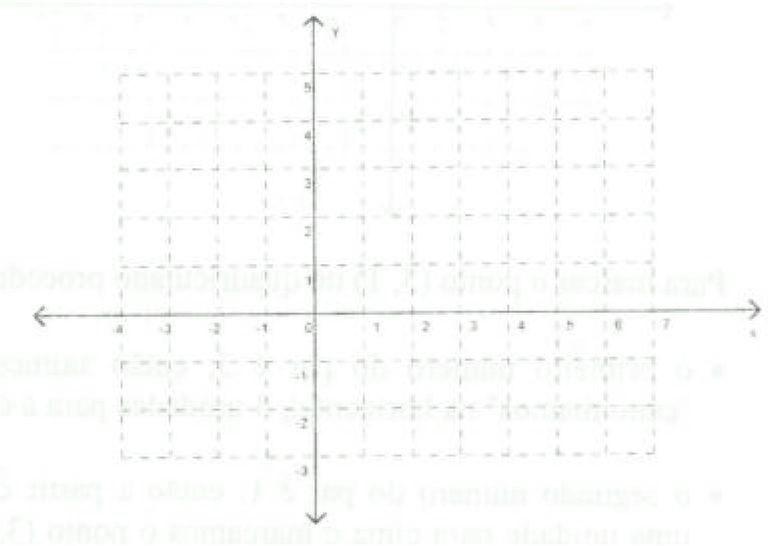
O plano cartesiano é um dos conhecimentos mais importantes que o homem construiu para nos ajuda a resolver problemas da vida prática como área de terrenos, salários, gastos, localização e problemas relacionados às Ciências como um todo.

ATIVIDADE – VI

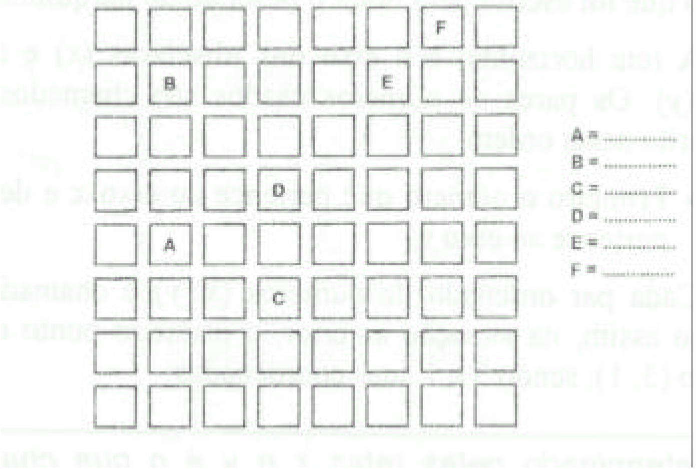
1) Estão escritos, logo abaixo, os pares que correspondem aos pontos que permitem desenhar o chapéu do zorro, no quadriculado (plano cartesiano):

(-3, 0) ; (6, 4) ; (2, 3) ; (1,5) ; (-1, 4) ; (0,2)

Localize esses pontos no plano cartesiano abaixo, una-os na ordem em que estão escritos. Ligue, por fim, o último ao primeiro.



2) Em um cinema, as poltronas estão distribuídas em 8 colunas e 8 linhas, como mostra a figura seguinte. Dê então a localização das poltronas A, B, C, D, E, F, usando pares ordenados.

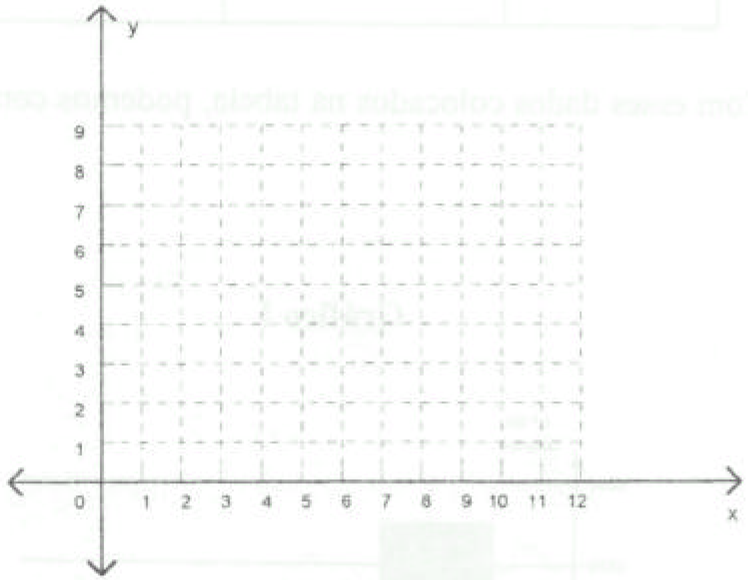


3) Localize no plano cartesiano os pontos:
A (-2, 3); B (5, 0); C (0, 5); D (3, -1); E (-1, -3); F (3, 2); G (-3, 1)

4) O diretor do jardim zoológico recebe uma mensagem secreta anunciando a chegada de um novo animal. Encontre os pontos correspondentes aos pares escritos na mensagem. Ligue-os na ordem em que estão escritos e obterá a resposta.

Mensagem escrita:

(4, 7); (5, 5); (6, 7); (6, 8); (4, 9); (3, 8); (3, 6); (2, 4); (0, 4); (1, 3); (3, 4); (4, 6); (3, 2); (4, 5); (5, 4); (5, 1); (6, 1); (7, 4); (8, 4); (9, 1); (10, 1); (10, 4); (12, 2); (10, 5); (9, 7); (6, 7).



3 – CONSTRUÇÃO DE TABELAS E GRÁFICOS

GRÁFICO DE BARRAS.

No CEEBJA de Maringá, em 1993 foram efetuadas 2756 matriculas de 1º grau e 1150 de 2º grau. O Diretor encomendou da secretária gráficos com esses e outros dados. Como ela está com algumas dificuldades, vamos ajudá-la!

Como? Assim:

- Precisamos organizar esses dados em uma tabela.

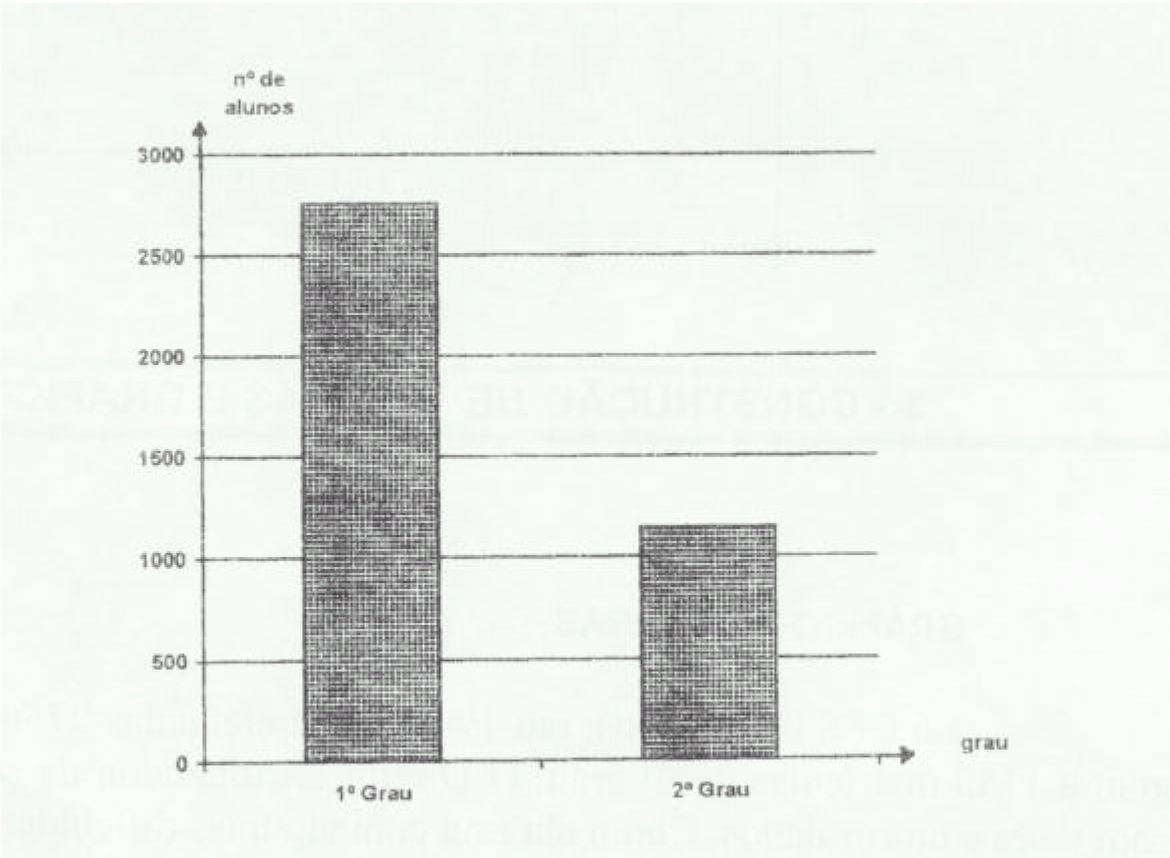
- É importante dar um título que informe o assunto da tabela ou do gráfico.

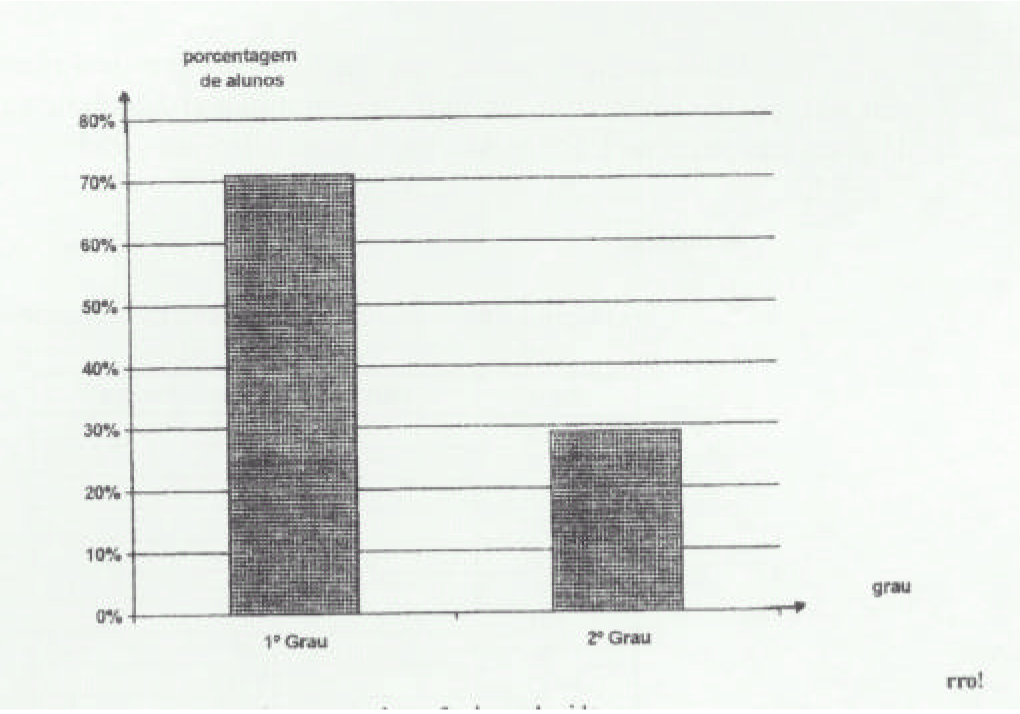
Veja:

Matriculados de 1º e 2º graus – CEEBJA Maringá - 1993

Grau	Número de Alunos	Porcentagem
1º	2756	71%
2º	1150	29%
Total	**3906**	**100%**

Com esses dados colocados na tabela, podemos construir o gráfico de barras.





Como você está observando esses gráficos fornecem as informações da tabela.

Esse tipo de gráfico geralmente é usado para fazer comparações de diversas grandezas da mesma natureza.

Mas, como chegamos a essa representação?

Chegamos à representação dos gráficos acima utilizando o plano cartesiano e procedendo da seguinte forma:

- No eixo x, representamos o grau a que pertencem os alunos matriculados no CEEBJA em 1993.
- No eixo y, colocamos o número ou a porcentagem corresponde a cada grau em relação ao total de matrículas.
- Usamos uma escala, no caso, 1 cm corresponde a 500 alunos (gráfico I) ou 1 cm corresponde a 10% do total de matriculas (gráfico II).
- No eixo x desenhamos uma barra para cada grau, com a altura igual ao número de alunos matriculados (gráfico I) ou porcentagem corresponde (gráfico II).

Esses retângulos que formam as barras têm bases de mesma medidas.

GRÁFICO DE LINHAS

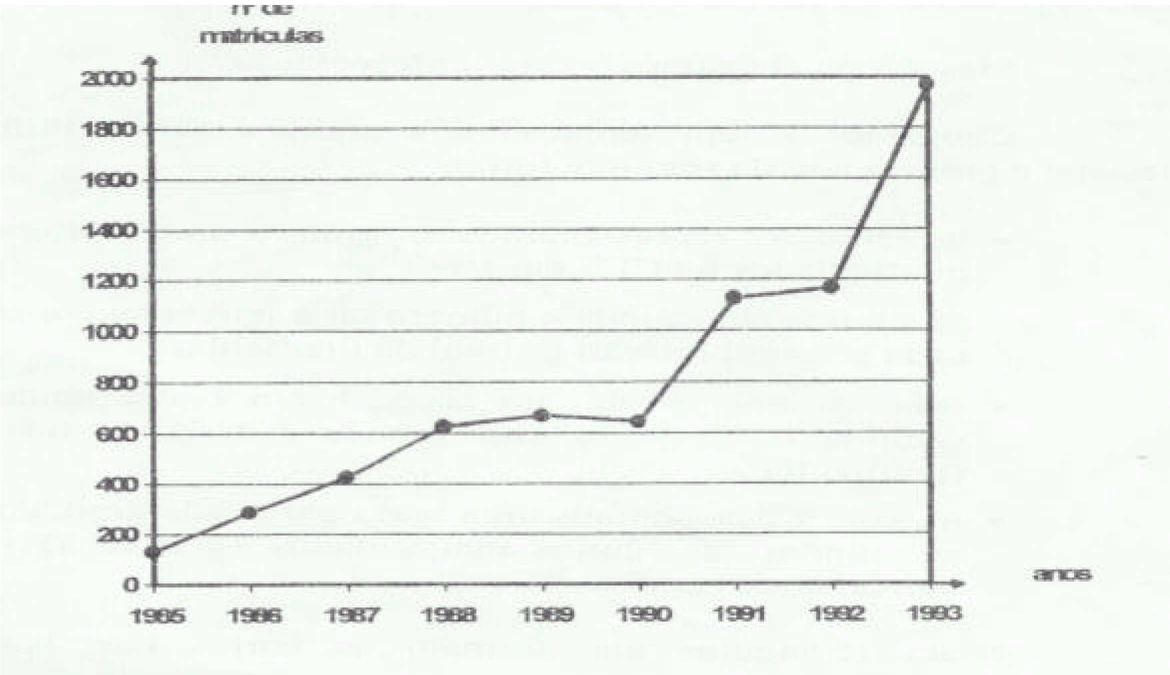
Esclarecemos, ainda, que existe o gráfico de linhas, para facilitar o seu serviço que é construir um gráfico com o número de matriculados dos alunos de 1º grau, efetuamos no CEEBJA de Maringá desde 1985 até 1993.

A tabela:

MATRICULADOS DE 1º GRAU (1985 – 1993) CEEBJA DE MARINGÁ

Ano	**Número de alunos matriculados**
1985	130
1986	267
1987	429
1988	629
1989	668
1990	643
1991	1127
1992	1166
1993	1999
Total	7078

Com os dados da tabela acima vamos construir um gráfico de linhas (segmentos).



O gráfico de linhas geralmente é usado para mostrar a variação de alguma coisa num determinado tempo.

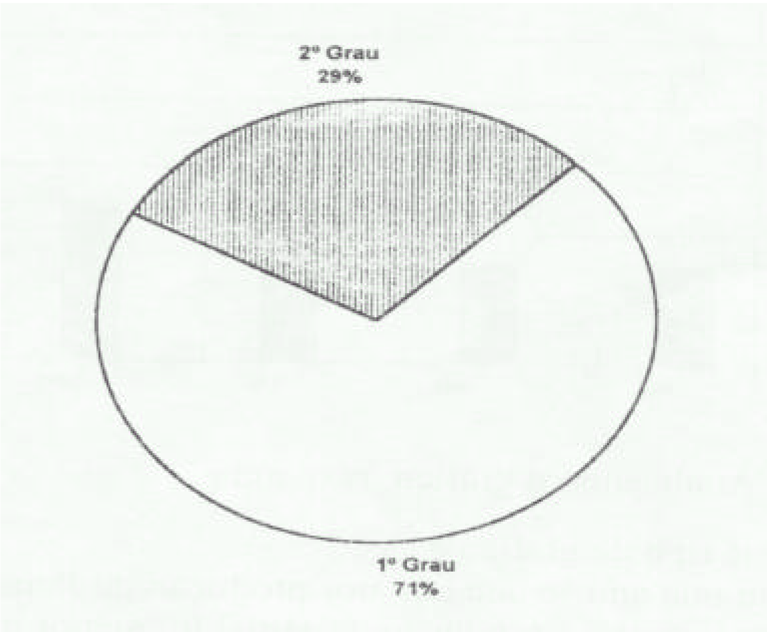
Para a construção do gráfico de linhas, também utilizamos o plano cartesiano. Com os valores da tabela formamos pares ordenados (1985, 130) para acharmos o ponto no plano.

- No eixo x, representamos os anos.
- No eixo y, o número de matriculas.
- Usamos uma escala, nesse caso foi usada a representação 1 cm para 200 alunos.
- Marcamos os pontos usando os dados da tabela, que indicam o número de matriculados em cada ano.
- Unimos os pontos com segmentos e temos aí um gráfico de linhas.

Veja que esse gráfico contém as mesmas informações da tabela, mas de modo muito eficiente, pois com uma rápida observação, percebe-se que o número de matriculas do CEEBJA vem aumentando.

GRÁFICO DE SETORES

Vamos esclarecer para a secretária que com os mesmos dados anteriores, ela pode também construir o gráfico de setores:



O gráfico de setores é usado para representar partes de um todo e geralmente as partes são expressas em porcentagens.

Para sua construção:

- Usamos o compasso e desenhamos um círculo com raio qualquer que vai representar os 100% dos dados.
- Calculamos a porcentagem do círculo que representa cada categoria, no caso, 1º grau e 2º grau. Assim: como todo círculo possui 360º e está representando 100%, então, calculamos 71% de 360º.

$$0{,}71 \times 360^\circ \Rightarrow 0{,}255{,}6^\circ$$

e

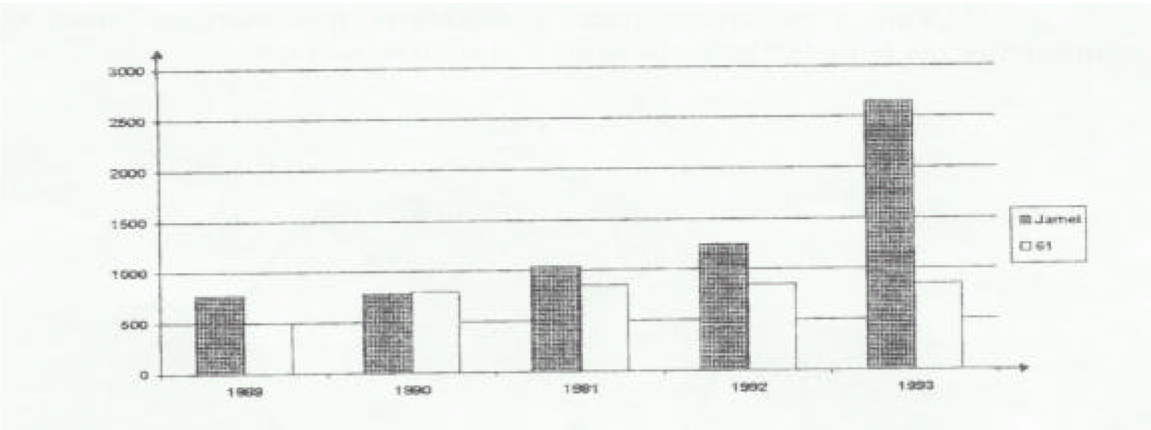
$$29\% \text{ de } 360^\circ \Rightarrow 0{,}29 \times 360^\circ = 104{,}4^\circ$$

- Agora com o uso do transferidor, dividimos esse círculo em partes, de acordo com os ângulos obtidos (255,6º e 104,4º) nos cálculos que representam as porcentagens de 71% e 29%.

ATIVIDADE - VII

1) O gráfico abaixo mostra a produção anual de aguardente em milhares de dúzias, da Empresa Missiato Indústria e Comércio LTDA de Jandaia do Sul, das marcas Jamel e 61.

PRODUÇÃO ANUAL EM MILHARES DE DÚZIAS
MISSIATO IND. E COMÉRCIO LTDA



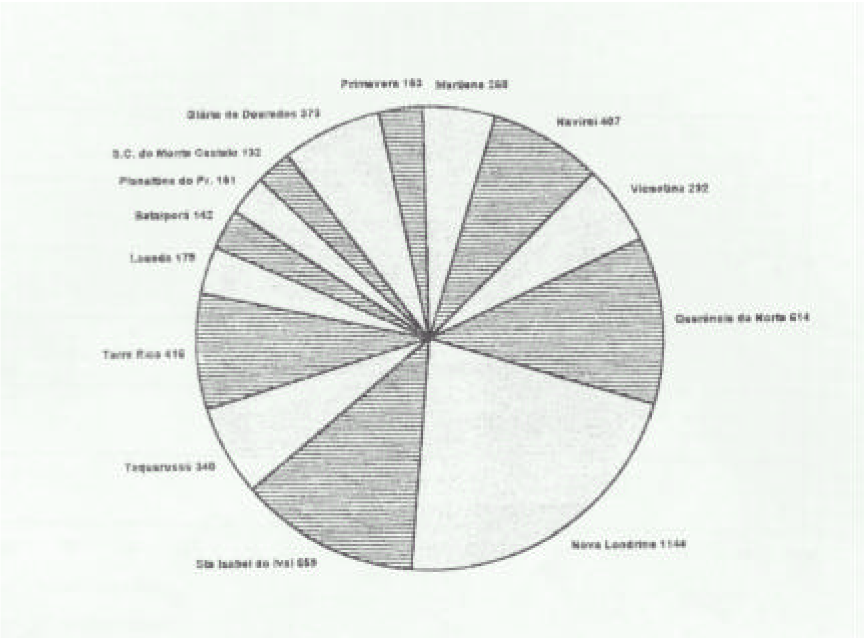
Analisando o gráfico, responda:

a) Que tipo d gráfico é esse?
b) Em que ano se deu a maior produção de Jamel? E de 61?
c) Em que ano a produção de Jamel foi menor que a de 61?
d) Em que ano ocorreu maior diferença entre Jamel e 61?
e) Quantas unidades de 61 foram produzidas em 1989?

2) O gráfico abaixo mostra a distribuição de associados por unidades da Cooperativa Agrária dos cafeicultores de Nova Londrina (COPAGRA).

DISTRIBUIÇÃO DE ASSOCIADOS POR UNIDADES

5.270 ASSOCIADOS



a) Que tipo de gráfico é esse?

b) Em que cidade se tem o maior número de associados?

c) Quantos associados a Empresa possui em Querência do Norte?

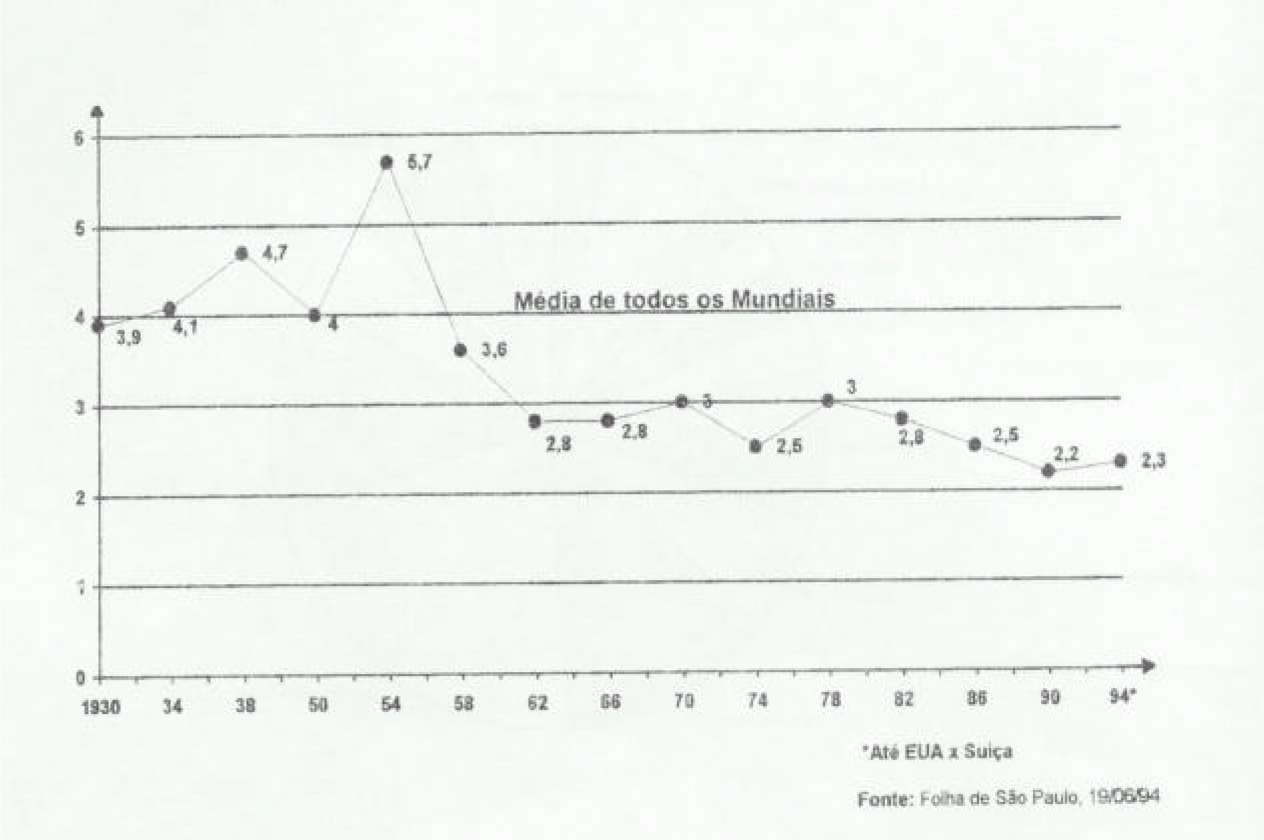
d) Qual é o total de associados da Empresa?

e) Quantos Entrepostos possui a Empresa?

3) O gráfico mostra a evolução dos gols nas Copas:

A EVOLUÇÃO DOS GOLS NAS COPAS

MÉDIA DE GOLS POR PARTIDA



Analise o gráfico e responda:

a) Que tipo de gráfico é esse?

b) Em que ano aconteceu o maior número de gols? Qual foi a média?

c) Qual a média de gols em 1990?

d) Em que ano se realizou a primeira Copa Mundial?

e) Quantas Copas Mundiais já se realizaram?

4) Com os dados da tabela abaixo construa um gráfico de linhas e responda:

O tamanho do copo *Consumo médio anual do brasileiro em diversos tipos de bebida em litros por habitantes.*	
Cerveja	**35**
Refrigerante	**35**
Leite	**20**
Aguardente	**6,7**

Fontes: Nielsen, IBGE, Adrabe e Uvibra

a) Quais as bebidas de maior consumo no Brasil?
b) Qual o consumo médio anual em litros de leite por habitantes no Brasil?
c) O que você acha do consumo da cerveja e do refrigerante ser maios do que o consumo do leite?

5) Uma Empresa possui um total de 120 funcionários, sendo, 92 homens e 28 mulheres. Com esses dados faça a tabela e construa um gráfico de barras.

6) A tabela abaixo mostra a produção em toneladas de uma indústria de 1991 à 1993.

Produtos	**Ano de 1991**	**Ano de 1992**	**Ano de 1993**
Fécula de mandioca	1876	1483	1373
Polvilho	1440	1244	1489
Sagu	-	638	1079

Construa no mesmo plano cartesiano, os gráficos de linha de cada produto.

BIBLIOGRAFIA

ASIMOV, Isaac. **No mundo dos Números**, Rio de Janeiro, Editora S/A, 1983.

BONGIOVANNI, Vicenzo; LEITE, Olímpio Rudinin Vissoto; LAUREANO, José Luiz Tavares. **Matemática e Vida.** São Paulo, Editora Ática S.A. 1990.

BOYER, Carl Benjamim. **História da Matemática.** São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda. 1974.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR., José Ruy. **A conquista da Matemática**. São Paulo, Editora FTD, Edição renovada.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy. **Aprendizagem e Educação Matemática.** São Paulo, Editora FTD, 1990.

GOMES, Carmem; CRUSIUS, Maria Fialho; DANYLUK, Osana Sônia. **Frações e Números Decimais.** Passo Fundo, Gráfica da Universidade de Passo Fundo, 1992.

IMENES, Luiz Márcio. **Vivendo a Matemática.** São Paulo, Editora Scipione – 7ª ed. 1992.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; JAKUBO, José; LELLIS, Marcelo Cestari. **Para que serve a Matemática.** São Paulo, Atual Editora, 1992.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na Medida Certa.** São Paulo, Editora Scipione, 1990.

JORNAL DO TELECURSO 1º GRAU. Rio de Janeiro, Editora Rio Gráfica, 5ª Edição, 3ª fase, Fundação Roberto Marinho, 1985.

KARLSON, Paul. **A magia dos números.** Porto Alegre – RS, Editora Globo S/A, 1961.

KIYUKAWA, Rokusaburo; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi; YAMAMOTO, Kazuhito. **Os elos da matemática.** São Paulo – SO, Editora Saraiva, 3ª edição, 1993.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Para aprender Matemática.** São Paulo – SP, Editora Saraiva, 4ª edição, 1991.

RAMOS, Luzia Faraco. **Série "A" Descoberta da Matemática.** São Paulo – SP, Editora Ática S/A 1993.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática.** São Paulo – SP, Editora Ática S/A, 4ª edição, 1992.

RUIZ, Adriano Rodrigues; CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. **O conceito de proporcionalidade.** São Paulo, Editora São Paulo, 1990.